# Relatività generale

La **Relatività generale** è una teoria fisica pubblicata da Albert Einstein nel 1915. Assieme alla sua derivata teoria di Brans-Dicke, costituiscono le due sole teorie metriche della gravitazione che non siano falsificate dagli esperimenti attuali. Come disse lo stesso Einstein, fu il lavoro più difficile della sua carriera di teorico a causa delle difficoltà matematiche da superare, poiché si trattava di far convergere concetti di geometria euclidea in uno spazio che poteva non esserlo. Le basi matematiche erano state esplorate in precedenza dal lavoro di Lobacevskij, Bolyai e Gauss, che avevano dimostrato la non necessarietà del quinto postulato di Euclide (noto nella forma di Playfair come *due rette parallele restano sempre equidistanti*), mentre il formalismo per uno spazio non-euclideo era stato sviluppato da Riemann, studente di Gauss. Tale formalismo era stato messo da parte come non applicabile alla realtà, fino all'introduzione appunto della relatività generale.

## Riflessioni iniziali e Relatività Speciale

Uno dei motivi che spinsero Einstein ad indagare in questa direzione fu una questione di simmetria: la relatività ristretta aveva stabilito l'uguaglianza di tutti i sistemi inerziali, lasciando fuori i sistemi accelerati, che presentano forze ben individuabili con un qualunque esperimento. Questo poneva i sistemi inerziali su una posizione *privilegiata*, diversa rispetto ai non inerziali, fatto che turbava Einstein dal punto di vista dell'eleganza della struttura teorica.

In più, la relatività ristretta aveva mostrato che lo spazio ed il tempo devono essere trattati insieme se si vogliono ottenere risultati coerenti; il tempo era diventato una coordinata come le altre 3 e ad impedire certi movimenti in questo spazio a 4 dimensioni c'è solo il principio di causalità.

In regioni dello spaziotempo a 4 dimensioni infinitamente piccole, per le quali è possibile un'accelerazione del sistema di coordinate in maniera da non indurre alcun campo gravitazionale, resta valida la relatività ristretta. Vale, cioè, che:

$$ds^2 = -(dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2 + (dx_4)^2$$

Il valore del *ds* non dipende dal sistema di coordinate ( da dove colloco l'origine degli assi e dal suo orientamento). Questo sistema è fatto di 4 assi cartesiano e, perciò, non è disegnabile, sebbene segua le regole di una geometria euclidea. Einstein introduce il concetto di coordinata temporale, che si aggiunge ai tre assi "spaziali" del sistema cartesiano.

Tuttavia, è necessaria una scelta conveniente del sistema di coordinate: occorre che lunità di misura della coordinata temporale $x_4$ sia scelta in modo che la velocità della luce nello spazio vuoto, misurata nel sistema locale, sia pari a 1. Perciò, il *ds* va pensato come un numero (puro) compreso tra zero e uno. Resta libera la scelta delle tre coordinate spaziali.

Misurando lo spazio e il tempo, l'equazione consente di determinare la lunghezza dell'elemento lineare *ds* che congiunge due punti dello spazio-tempo infinitamente vicini. L'equazione è la definizione di questa grandezza fisica, che resta definita se è misurabile.

Nonostante si tratti di un termine quadratico, $ds^2$ può assumere valore negativo: <<seguendo Mincowski>>, se $ds^2 < 0$ l'elemento ha natura di uno spazio (termini spaziali prevalenti su quello temporale); viceversa, se $ds^2 > 0$, l'elementi linearte ha natura di un tempo. In definitiva, non c'è una netta demarcazione fra spazio e tempo, ma appunto un "continuum": si dice che è uno spazio o un tempo, a seconda che l'elemento è "più uno spazio" o "più un tempo", in base alla componente che prevale.

Facendo tendere a zero il *ds*, con la relatività ristretta si ricava la velocità della luce.

L'equazione, che assegna un segno opposto alle coordinate spaziali e a quella temporale, afferma che dove lo spazio si contrae il tempo si dilata (passa più lentamente); e viceversa dove lo spazio si dilata, il tempo si contrae.

Propriamente, un punto non ha significato fisico. L'elemento base della teoria è detto punto piccolo infinitesimale, che in realtà è un segmento piccolo arbitrariamente che tende a una lunghezza zero, ossia due punti che tendono a coincidere in uno solo.

Il passo successivo è la definizione di una geodetica, ossia di una traiettoria del punto nello spazio-tempo. Come l'elemento lineare *ds*, essa è una linea che unisce due punti dello spazio tempo. La particolarità è che un estremo della geodetica è uguale a $\int ds$. La geodetica è un elemento lineare che, avendo un estremo pari alla somma di un numero arbitrario di elementi lineari, rappresenta un traiettoria. In questo modo, si arriva a misurare una grandezza finita, non solo infinitesimale: essa non dipende dal sistema di riferimento, in quanto somma (integrale nel continuo) di elementi lineari *ds* la cui definizione non dipende dal sistema di coordinate.

Il tensore fondamentale covariante è dato dalla:

$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.

$dx^\mu$ e $dx^\nu$ sono vettori controvarianti che possono essere scelti arbitrariamente. Invece, vale che $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, e perciò $g_{\mu\nu}$ è un tensore doppio covariante.

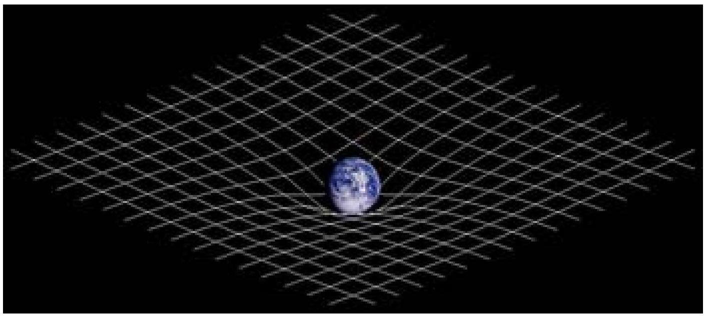
Quindi, Einstein applica la matematica del tensore e le proprietà del tensore fondamentale, per dedurre il tensore di Riemann-Christoffel.

Un celeberrimo esperimento ideale, noto come *ascensore di Einstein*, fu l'intuizione da cui tutto il successivo sviluppo della teoria prese le mosse: su un ascensore in caduta libera, senza possibilità di vedere all'esterno, un' osservatore supporrebbe di essere in assenza di gravità; per provarlo, egli lascia cadere una moneta ed osserva che la moneta resta alla stessa altezza nella cabina ovvero non cade rispetto ad essa, che per l'osservatore è l'unico punto di riferimento. Questo porterebbe allora a dire che un sistema in caduta libera (cioè in un campo gravitazionale) è indistinguibile (almeno per un certo periodo) da un altro non sottoposto ad alcuna forza.

D'altra parte, quando l'ascensore è fermo, l'osservatore sente una normale forza di gravità (e una moneta lasciata andare cade ai suoi piedi); non appena l'ascensore inizia a cadere, la moneta resta a mezz'aria: in questo caso l'osservatore può pensare che sia comparso all'improvviso un campo gravitazionale dalla direzione del soffitto, che bilancia esattamente quello di partenza; di nuovo non può decidere quale dei due casi sia quello vero. Quindi i sistemi accelerati non dovevano essere così eccezionali.

Da questi presupposti, Einstein cercò quindi di costruire una *visione* della realtà parallela a quella della legge d'inerzia: mentre in quel caso un corpo si muove, non accelerato, lungo una retta se non viene sottoposto a forze, in questo caso un corpo sottoposto alla sola gravità si muove lungo una traiettoria che, nello spazio-tempo deformato, corrisponde ad una retta.

## La curvatura dello spaziotempo



Una celebre illustrazione divulgativa della curvatura dello spaziotempo dovuta alla presenza di massa, rappresentata in questo caso dalla Terra.

La teoria afferma infatti che lo

spaziotempo viene più o meno *curvato* dalla presenza di una massa; un'altra massa più piccola si muove allora come effetto di tale curvatura.

Spesso, si raffigura la situazione come una palla che deforma il piano del biliardo con il suo peso, mentre un'altra pallina viene accelerata da questa deformazione del piano ed in pratica attratta dalla prima.
Questa è solo una semplificazione alle dimensioni raffigurabili, in quanto ad essere deformato è lo spazio-tempo e non solo le dimensioni spaziali, cosa impossibile da raffigurare e difficile da concepire.

L'unica situazione che riusciamo a raffigurare correttamente è quella di un universo a 1 dimensione spaziale ed una temporale. Un qualunque punto materiale è rappresentato da una linea (linea di universo), non da un punto, che fornisce la sua posizione per ogni istante: il fatto che sia fermo o in moto farà solo cambiare l'inclinazione di questa retta. Ora pensiamo di *curvare* tale universo usando la terza dimensione: quello che prima era la retta che descriveva un punto, ora è diventata una superficie.

Su una superficie curva non vale la geometria euclidea, in particolare è possibile tracciare un triangolo i cui angoli sommati non forniscono 180° ed è anche possibile procedere sempre nella stessa direzione, ritornando dopo un certo tempo al punto di partenza.

## Descrizione della gravitazione

Ogni particella di materia si muove *a velocità costante* lungo una curva, chiamata geodetica che in ogni momento (cioè localmente) può essere considerata retta. La sua velocità è data dal rapporto tra la distanza *spaziale* percorsa ed il tempo *proprio*, dove il tempo proprio è quello misurato nel riferimento della particella, mentre la distanza spaziale dipende dalla metrica che definisce la struttura dello spazio-tempo. La curvatura determina l'effettiva forma delle geodetiche e quindi il *cammino* che un corpo segue nel tempo.

In altre parole, un corpo si muove nello spazio-tempo sempre lungo una geodetica, allo stesso modo in cui nella meccanica classica un corpo non sottoposto a forze si muove lungo una retta. Se la struttura dello spazio-tempo in quel punto è piatta, la geodetica sarà proprio una retta, altrimenti assumerà forme diverse, ma il corpo la seguirà comunque. In questo modo, la gravità viene ad essere inglobata nella struttura dello spazio-tempo.

Ancora una volta, è da notare che tale curvatura è applicata non solo alle coordinate spaziali, ma anche a quella temporale; questo porta a notevoli difficoltà pratiche nel tentare di immaginare una simile superficie a 4 dimensioni.

# Fondamenti della teoria

In presenza di sistemi accelerati (o, che è lo stesso, sistemi sotto l'influenza della gravità), si possono definire come inerziali solo zone *locali* di riferimenti e per brevi periodi. Questo corrisponde ad approssimare con un piano ciò che sarebbe curvo su larga scala). In tali situazioni valgono ancora le leggi di Newton.

Ora il principio di equivalenza afferma che non esiste un esperimento locale per distinguere tra una caduta libera in un campo gravitazionale ed un moto uniforme in assenza di campo (ascensore di Einstein)

Matematicamente, Einstein descrive lo spazio-tempo come uno pseudo-spazio di Riemann a 4 dimensioni; la sua equazione di campo lega la curvatura in un punto al tensore energia in quel punto, essendo tale tensore dipendente dalla densità di materia ed energia. L'equazione di campo indicata da Einstein non è l'unica possibile, ma si distingue per la semplicità dell'accoppiamento tra materia/energia e curvatura.

Tale equazione contiene un termine $\Lambda$, chiamato costante cosmologica, introdotto da Einstein per permettere un universo statico. Nella decina di anni successiva, osservazioni di Hubble mostrarono che l'universo è (o comunque appare) in espansione ed il termine cosmologico venne omesso (lo stesso Einstein giudicò un errore la sua introduzione). Sembra però che Einstein fosse condannato ad avere ragione anche quando sbagliava: come successe per la teoria dei quanti, che fondò ma ritenne sempre sbagliata, anche la costante cosmologica è stata riabilitata. Nel 1998, l'osservazione dello spostamento verso il rosso di supernovae lontane, ha costretto gli astronomi a impiegare una costante cosmologica per spiegare l'accelerazione dell'espansione dell'Universo.

La forma dell'equazione di campo è:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

dove:

$R_{\mu\nu}$: tensore di curvatura di Ricci,

$R$: scalare di curvatura di Ricci,cioè la traccia di $R_{ik}$

$g_{\mu\nu}$: tensore metrico,

$\Lambda$: costante cosmologica,

$T_{\mu\nu}$: tensore stress-energia,

$c$: velocità della luce,

$G$: costante gravitazionale.

Il tensore $g_{\mu\nu}$ descrive la metrica dello spazio-tempo ed è un tensore simmetrico 4x4, che quindi ha 10 componenti indipendenti; date le 4 coordinate utilizzate, le equazioni indipendenti si riducono a 6.

## Soluzioni dell'equazione di campo

Le soluzioni dell'equazione di campo dipendono dal sistema che si sta considerando. Possono inoltre distinguersi in soluzioni *locali* o *globali*.

Le soluzioni locali, in cui si considera per esempio una massa posta nell'origine del sistema di riferimento, presuppongono una metrica che descriva uno spazio-tempo piatto per grandi distanze dall'origine. Queste soluzioni si dividono a seconda dei valori assunti dai parametri $m$ (massa), $a$ (momento angolare), $Q$ (carica elettrica), tutte quantità espresse con la convenzione semplificativa $G = c = 1$. Ovviamente nel caso $Q$ sia non nulla, oltre all'equazione di campo di Einstein, si dovranno risolvere simultaneamente le equazioni di Maxwell del campo elettro-magnetico. Inoltre si distinguono soluzioni nel vuoto quanto $T_{ik}$ è nullo, o nella materia quando $T_{ik}$ è non nullo (per materia si intende sia massa che energia).

Nel 2006, Franklin Felber ha annunciato una nuova soluzione valida per una massa che viaggi a velocità vicine a quella della luce: secondo i suoi calcoli, davanti alla massa in moto vi sarebbe un campo di pressione negativa. Secondo Felber, ogni massa che viaggi ad più di $\frac{1}{\sqrt{3}}c$, circa il 57,7% della velocità della luce, respingerebbe gravitazionalmente le altre masse in uno stretto fascio antigravitazionale, lungo la direzione del moto. Tanto più la massa si avvicina a $c$, tanto più forte è la repulsione.

Le soluzioni più conosciute utilizzate in cosmologia sono

- la metrica di Robertson - Walker
- la metrica FLRW, un ampliamento della precedente

Vi sono poi quelle utilizzate per lo studio teorico dei buchi neri, derivate ponendo $\Lambda = 0$ e $T_{ik} = 0$:

- m≠0, a=0, Q=0 (corpo dotato di massa, non rotante, scarico): soluzione di **Schwarzschild**.
- m≠0, a≠0, Q=0 (corpo dotato di massa, rotante, scarico): soluzione di **Kerr**.
- m≠0, a=0, Q≠0 (corpo dotato di massa, non rotante, carico): soluzione di **Reissner-Nordstrøm**.
- m≠0, a≠0, Q≠0 (corpo dotato di massa, rotante, carico): soluzione di **Kerr-Newmann**.

Dal precendete prospetto si può vedere come, una volta ricavata la metrica (ovvero il $ds^2 = g_{ik}x^i x^k$) di Kerr-Newmann, si possano ricavare tutte le altre per semplificazione, ponendo di volta in volta i vari paramentri a zero.

**Metrica di Kerr-Newmann**

La metrica di Kerr-Newmann è dunque con m≠0, a≠0 e Q≠0, ed è quindi a simmetria assiale:

$$ds^2 = -\Sigma\Delta^{-1}dr^2 - \Sigma d\vartheta^2 - \Sigma^{-1}\sin^2\vartheta[adt - (r^2+a^2)d\varphi]^2 + \Sigma^{-1}\Delta[dt - a\sin^2\vartheta d\varphi]^2$$

dove

- $\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2 + a^2$
- $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\vartheta$

raccogliendo i termini con i differenziali simili

$$\begin{aligned} &ds^2 \\ &+\Sigma^{-1}[\Delta - a^2\sin^2\vartheta]dt^2 \\ &-\Sigma\Delta^{-1}dr^2 \\ &-\Sigma d\vartheta^2 \\ &-\Sigma^{-1}\sin^2\vartheta[(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta]d\varphi^2 \\ &+2a\Sigma\sin^2\vartheta(2Mr - Q^2)dtd\varphi \end{aligned}$$

si può scrivere la matrice che rappresenta il tensore metrico

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} +\Sigma^{-1}[\Delta - a^2 \sin^2 \vartheta] & 0 & 0 & +a\Sigma^{-1}\sin^2\vartheta(2Mr - Q^2) \\ 0 & -\Sigma\Delta^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ +a\Sigma^{-1}\sin^2\vartheta(2Mr - Q^2) & 0 & 0 & -\Sigma^{-1}\sin^2\vartheta[(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta] \end{pmatrix}$$

**Metrica di Kerr**

Annullando *Q* nella metrica di Kerr-Newmann si ottiene la metrica di Kerr, soluzione dell'equazione di campo (senza campo elettromagnetico), anch'essa a simmetria assiale:

$$ds^2 = dt^2 - \Sigma\Delta^{-1}dr^2 - \Sigma d\vartheta^2 - (r^2 + a^2)\sin^2\vartheta d\varphi^2 - 2\Sigma^{-1}Mr(dt - a\sin^2\vartheta d\varphi)^2$$

dove ora

- $\Delta = r^2 - 2Mr + a^4$
- $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\vartheta$

Operando lo stesso tipo di raccoglimento che per la metrica di Kerr-Newmann, si può scrivere la rapprensentazione matriciale dell tensore metrico

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} +1 - 2\Sigma^{-1}Mr & 0 & 0 & +2a\Sigma^{-1}Mr\sin^2\vartheta \\ 0 & -\Sigma\Gamma^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Sigma^2 & 0 \\ +2a\Sigma^{-1}Mr\sin^2\vartheta & 0 & 0 & -\sin^2\vartheta[(r^2+a^2) + 2\Sigma^{-1}Mra] \end{pmatrix}$$

**Metrica di Schwarzschild**

Se infine si pongono a=0 e Q=0 si ottiene la metrica di Schwarzschild, soluzione delle equazioni di Einstein (senza campo elettro-magnetico) in simmetria sferica. Si avrà quindi

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2 d\vartheta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

sapendo che ora

$\Delta = r^2 - 2Mr$

$\Sigma = r^2$

e in forma matriciale su avrà

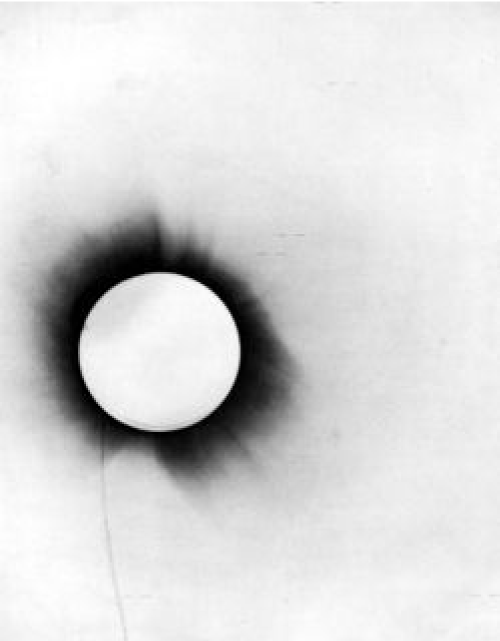
$$g_{ik} = \begin{pmatrix} +\Delta\Sigma^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta^{-1}\Sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Le **singolarità della metrica** risultano quando $ds^2 \to \infty$, per cui, nella metrica di Schwarzschild si verificano quando

- $1 - \frac{2M}{r} = 0 \iff r = 2M$
- $r = 0$

Nel primo caso si ha una singolarità *eliminabile* cambiando sistema di riferimento e corrisponde al raggio di Schwarzschild (ovvero la distanza dal centro del buco nero a cui si forma l'orizzonte degli eventi). Il fatto che la singolarità sia eliminabile è spiegabile considerando che le geodetiche non si interrompono attraversando l'orizzonte degli eventi. Nel secondo caso, viceversa, si tratta di una singolarità *non eliminabile* e corrisponde ad una curvatura infinita dello spazio-tempo, spesso raffigurata come un imbuto senza fine, una smagliatura nel tessuto spaziotemporale.

## Conferme sperimentali



Negativo della lastra di Sir Arthur Eddington raffigurante l'eclisse solare del 1919, utilizzata per mettere alla prova la previsione di deviazione gravitazionale della luce.

Pur essendo stata formulata quasi un secolo fa, ancora oggi la relatività generale resta per molti un quadro piuttosto oscuro, che probabilmente ancora oggi pochi riescono a comprendere appieno, come disse anche lo stesso Feynman.

A tutt'oggi vengono proposti esperimenti per la conferma o meno di tale teoria, che al momento attuale ha sempre resistito agli attacchi. Sono indicati qui sotto solo i più importanti.

La prima conferma, poi rivelatasi impropria, si ebbe nel 1919, quando osservazioni di Arthur Eddington durante un'eclisse di Sole confermarono la visibilità di alcune stelle vicine al bordo solare, che in realtà avrebbero dovuto essere invisibili: i fotoni luminosi venivano deviati dal Sole della quantità prevista dalle equazioni. In realtà, le osservazioni avevano un errore medio dello stesso ordine di grandezza dell'effetto considerato. La prima vera conferma fu la spiegazione del moto di precessione del perielio di Mercurio, inspiegabile con la gravitazione Newtoniana, ma previsto dalla relatività generale.

Un'altra conferma più recente, ma ormai completamente accettata dalla comunità scientifica, è l'effetto lente gravitazionale di cui le osservazioni di Eddington sono un caso particolare. La luce emessa da una sorgente lontana, transitando nelle vicinanze di un oggetto molto massiccio può venire deviata, con un effetto complessivo che può sdoppiare (o meglio trasformare in un anello), l'immagine della sorgente.

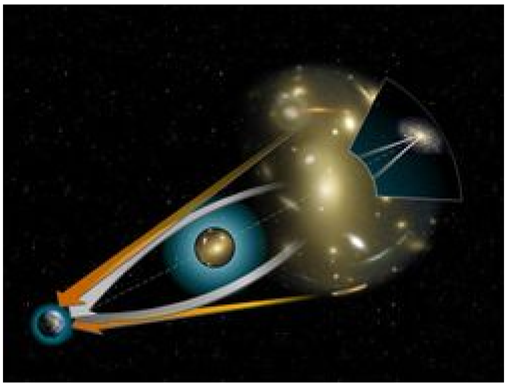


Illustrazione dell'effetto lente gravitazionale: la sorgente "vera" è nel riquadro in alto a destra. Il percorso della luce è rappresentato dalle frecce bianche, mentre quelle arancioni permettono di ricostruire la posizione apparente della sorgente ovvero la posizione delle sue immagini.

È relativamente recente la scoperta indiretta dell'esistenza dei buchi neri, oggetti pesanti e compatti, dalla cui superficie non può sfuggire (quasi) nulla, essendo la velocità di fuga superiore a quella della luce. *Quasi* nulla in quanto il fisico Stephen Hawking ha dimostrato come i buchi neri evaporino perdendo particelle, per lo più fotoni, tanto più velocemente quanto più piccola è la massa del buco nero. Questo risultato deriva direttamente dalla conservazione del secondo principio della termodinamica, ed è stata la prima applicazione congiunta di relatività generale e meccanica quantistica.

Sono recentemente in atto alcuni esperimenti per la registrazione di onde gravitazionali, anch'esse previste dalla teoria: tali onde si svilupperebbero quando due corpi con un enorme campo gravitazionale orbitano a distanza ravvicinata l'uno con l'altro. Uno dei più grandi rilevatori è il progetto VIRGO, situato a Cascina, vicino Pisa.

Un altro risultato che confermerebbe la teoria è il cosiddetto *frame dragging*, ossia il trascinamento del sistema di riferimento da parte di masse in rotazione: oltre alla sonda *Gravity Probe B* della NASA, un articolo di ricercatori dell'Università di Lecce e del Maryland hanno utilizzato i dati delle orbite di alcuni satelliti, confermando entro l'errore dell'1% le previsioni della teoria.

Nel 2004 alcuni ricercatori della Cornell University hanno provato a simulare una diversa costante gravitazionale per fermioni e bosoni, e hanno rilevato che questa ipotesi sembra essere in accordo con l'abbondanza relativa dell'elio nell'universo primordiale.

Tuttavia il destino della relatività generale è segnato, così come quello della meccanica quantistica: infatti la prima è una teoria *classica*, in cui non si tiene conto del carattere quantizzato della materia e dell'energia, e quindi va intesa come una media su un numero grande di particelle, le cui previsioni cessano di essere valide quando si raggiungono condizioni tipiche delle interazioni quantistiche, ossia per tempi vicini al tempo di Planck e lunghezze prossime alla lunghezza di Planck; la seconda, invece, non tiene conto degli effetti relativistici, ponendo le particelle in uno spazio-tempo assoluto, e dunque le sue previsioni cessano di essere valide quando gli effetti relativistici diventano significativi.

L'unificazione delle due teorie, la cosiddetta teoria quantistica della gravitazione è uno degli obiettivi più importanti per la fisica del XXI secolo.